Colles de Maths - semaine 3 - MP*2
Lycée du Parc

Julien Allasia - ENS de Lyon

Choses à retenir Pour déterminer la nature d'une série (grosso modo, par ordre de priorité) :

1. Si le terme général est positif, le comparer à quelque chose de plus simple (majoration ou équivalent) ;
2. Sinon, essayer d'obtenir un développement asymptotique qu'on arrête au premier terme absolument convergent (ou positif divergent) ;
3. Utiliser le critère spécial des séries alternées si besoin ;
4. Regrouper par paquets (par exemple, pour les termes généraux ayant un comportement périodique, ou faisant apparaître une fonction discontinue comme la partie entière...) ;
5. Voir s'il n'y a pas un télescopage (surtout si l'on demande de calculer la somme) ;
6. Revenir à la suite des sommes partielles plutôt que de regarder le terme général seulement :
   — Les majorer si le terme général est positif ;
   — Utiliser une comparaison série-intégrale si le terme général fait apparaître une fonction décroissante ou croissante ;
   — Utiliser une transformation d'Abel.

Exercice 1 (*) Quelle est la nature des séries suivantes ?

1. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha} \int_0^n \frac{\operatorname{Arctan} t}{1+t}\, dt$, en fonction de $\alpha > 0$;
2. $\displaystyle\sum_{n\geq 2} \cos\left(n^2\, \pi \ln\left(\frac{n}{n-1}\right)\right)$;
3. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{\binom{n}{3}}}{n}$;
4. $\displaystyle\sum_{n\geq 1} (-1)^n f(1/n)$ où $f \in \mathcal{C}^2([0,1])$;
5. $\sum_{n\geq 1} \dfrac{n^n\, a^n}{\sum_{k=1}^n k!}$ en fonction de $a > 0$.

Exercice 2 (*) Quelle est la nature de la série de terme général $\ln\left(\dfrac{(\ln(n+1))^2}{\ln n\, \ln(n+2)}\right)$? Calculer sa somme.

Exercice 3 (*) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels strictements positifs. On pose $S_n = \sum_{k=0}^n u_k$ et en cas d'existence $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$.

1. Si $\sum u_n$ diverge, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{S_n^\alpha}$ converge $\iff \alpha > 1$.
2. Si $\sum u_n$ converge, montrer que $\sum \dfrac{u_n}{R_n^\alpha}$ converge $\iff \alpha < 1$.
3. Application : Remontrer le critère de Bertrand à l'aide de 1.

Exercice 4 (**, calculatoire) Trouver un équivalent quand n tend vers l'infini de

$$u_n = \left(\prod_{k=1}^n k^k\right)^{1/n}.$$

Exercice 5 (**) Soit $(u_n)_{n\geq 1}$ une suite positive décroissante qui tend vers 0. Montrer que les séries $\sum u_n$ et $\sum n(u_n - u_{n+1})$ sont de même nature, et qu'en cas de convergence leurs sommes sont égales.

Conséquence (qui découle aussi de Fubini) : Si $\sum u_n$ *est une série convergente à termes positifs, et si* $R_n = \sum_{k=n}^{+\infty} u_k$*, alors* $\sum R_n$ *et* $\sum n\, u_n$ *ont même nature et en cas de convergence, leurs sommes sont égales.*